Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Année Universitaire 2019/2020
SMIA (S1)

Examen de rattrapage d'algèbre 1
Durée : 1h30
Documents non autorisés

Ex. 1 — On dit qu'une partie A de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est **ouverte** si

$$\forall x \in A,\ \exists \epsilon > 0,\ ]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset A.$$

Compléter :

$$(A \text{ n'est pas ouverte}) \Longleftrightarrow \ldots x \in A,\ \ldots \epsilon > 0,\ \ldots y \ldots A,\ |x-y| \ldots \epsilon$$

par les signes $\exists$, $\forall$, $\in$, $\notin$, $<$, $\geq$, pour obtenir une relation vraie.

Ex. 2 — Soient A, B et C trois parties d'un même ensemble E. Montrer l'implication

$$(A \cap B \subset A \cap C) \text{ et } (A \cup B \subset A \cup C) \Longrightarrow B \subset C.$$

Ex. 3 — Soient X et Y deux ensembles.

1) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications. Montrer que X et Y peuvent s'écrire comme réunions disjointes :

$$X = X_1 \cup X_2, \quad Y = Y_1 \cup Y_2,$$

avec $f(X_1) = Y_1$ et $g(Y_2) = X_2$ (Considérer l'application

$$\mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X), \quad A \mapsto X - g[Y - f(A)]$$

et utiliser le résultat admis (voir TD) [1].)

2) En déduire que, s'il existe une injetion de X dans Y et une injection de Y dans X alors il existe une bijection de X sur Y (Théorème de Bernstein–Schröder).

1. Soit E un ensemble. Toute application croissante f de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$ (c'est-à-dire que $X \subset Y$ entraîne $f(X) \subset f(Y)$), possède un point fixe (c'est-à-dire, il existe $X_0 \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X_0) = X_0$).